Übungsblatt 6.

Abgabe bis: **Montag, 26.10.2020, 12:00**

Aufgabe 1 (explizite Mehrschrittverfahren | 4 Punkte)**.**

Konstruieren Sie analog zu den Adams-Bashforth- und Nyström-Verfahren über den Ansatz

$$\mathbf{y}(x_{i+k}) = \mathbf{y}(x_{i+k-3}) + \int_{x_{i+k-3}}^{x_{i+k}} \mathbf{f}\big((t, \mathbf{y}(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

ein explizites Dreischrittverfahren und überprüfen Sie dessen Konsistenzordnung.

Aufgabe 2 (homogene Differenzengleichungen I | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten die lineare, homogene Differenzengleichung

$$\eta_{i+k} + \sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha_\ell \eta_{i+\ell} = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich diese Differenzengleichung umschreiben lässt in eine lineare, k-dimensionale Rekursion

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_i := \begin{bmatrix}\eta_i & \cdots & \eta_{i+k-1}\end{bmatrix}^\intercal.$$

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$.

(c) Sei λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$. Weisen Sie nach, dass dann

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{k-1}\end{bmatrix}^\intercal$$

ein zu λ gehöriger Eigenvektor ist.

Aufgabe 3 (homogene Differenzengleichungen II | 4 Punkte)**.**

Sei λ ein Eigenwert von der Matrix $\mathbf{A}$ aus Aufgabe 2. Dann ist ein Hauptvektor $\mathbf{v}^{(k)}$ der Stufe k zum Eigenwert λ definiert durch die Gleichungen

$$\big(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\big)^{k-1}\mathbf{v}^{(k)} \neq 0 \quad \text{und} \quad \big(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\big)^{k}\mathbf{v}^{(k)} = 0.$$

(a) Es sei λ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit s. Weisen Sie nach, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}^{(\ell)} = \left[\binom{j-1}{\ell-1}\lambda^{j-\ell}\right]_{j=1}^{k} \qquad \ell = 1, 2\ldots, s,$$

Hauptvektoren der Stufe ℓ zum Eigenwert λ sind.

Hinweis. *Überprüfen Sie zunächst, dass* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}^{(\ell)} = \mathbf{v}^{(\ell-1)}$ *gilt.*

(b) Zeigen Sie, dass mit Hilfe dieser Hauptvektoren eine Lösung der homogenen Differenzengleichung aus Aufgabe 2 durch

$$\eta_i^{(\ell)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i < \ell, \\ \frac{i!}{(i-\ell)!}\lambda^{i-\ell}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $\ell = 0, 1, \ldots, s-1$ gegeben ist.