Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht
M. Schmidlin

Numerik der Differentialgleichungen Herbstsemester 2020

Übungsblatt 4.

Abgabe bis: **Montag, 12.10.2020, 12:00**

Aufgabe 1 (Kollokationsverfahren I | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

für ein $h \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x \in [x_0, x_0 + h]$. Wir definieren das *Kollokationsverfahren* wie folgt: Sei $p \in \Pi_m$ das Polynom vom Grad m, welches $m+1$ Kollokationsbedingungen erfüllt. Dann ist ein Schritt des Verfahrens durch $y(x_0 + h) \approx \eta_1 := p(x_0 + h)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $m = 1$ und die Kollokationsbedingungen

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_0 + \sigma h) = f\big(x_0 + \sigma h, p(x_0 + \sigma h)\big)$$

für $\sigma = 0, \frac{1}{2}, 1$ auf das explizite Euler-Verfahren, die implizite Mittelpunktsregel und das implizite Euler-Verfahren führen.

(b) Sei $m = 2$ und die Kollokationsbedingungen

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_0) = f\big(x_0, p(x_0)\big) \quad \text{und} \quad p'(x_0 + h) = f\big(x_0 + h, p(x_0 + h)\big)$$

gegeben. Auf welches Verfahren führt dies?

Aufgabe 2 (Kollokationsverfahren II | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten auf dem Intervall $[x_0, x_0 + h]$ das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}_{>0}$. Zu gegebenen m paarweise verschiedene Stützstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in [0,1]$ ist das Kollokationsverfahren wie in Aufgabe 1 definiert. Allerdings wollen wir hier aber die Kollokationsbedingungen

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_0 + \alpha_i h) = f\big(x_0 + \alpha_i h, p(x_0 + \alpha_i h)\big) \quad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

fordern.

(a) Zeigen Sie, dass das Kollokationsverfahren ein Runge-Kutta-Verfahren ist, wobei

$$\beta_{i,j} = \int_0^{\alpha_i} L_j(t)\,\mathrm{d}t, \quad \gamma_j = \int_0^1 L_j(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad L_j(t) := \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \frac{t - \alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i}.$$

Hinweis. *Verwenden Sie* $p'(t) = \sum_{j=1}^{m} K_j L_j(t)$.

(b) Verifizieren Sie, dass die Koeffizienten $\beta_{i,j}$ und γ_i des Kollokationsverfahrens

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \alpha_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_{i,j} \alpha_j^{k-1} = \frac{\alpha_i^k}{k}, \quad i, k = 1, \ldots, m,$$

erfüllen.

Aufgabe 3 (Exaktheit von Runge-Kutta-Verfahren | 4 Punkte)**.**

Sei p ein Polynom vom Grad $\leq r-1$. Zeigen Sie, dass jedes Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung r das Anfangswertproblem

$$y'(x) = p(x), \quad y(x_0) = y_0$$

exakt löst, das heisst, es gilt $\eta_j = y(x_j)$ für alle $j \geq 0$.

Hinweis. *Achtung! Sie können Satz 2.15 nicht benutzen, da dort nur gezeigt wird, dass die Bedingung (2.7) und (2.8)* hinreichend *sind, um die Konsistenzordnung r zu erhalten. Hier beweisen Sie aber, dass (2.8) auch* notwendig *ist. Berechnen Sie daher η_1 und vergleichen Sie dies mit der Taylor-Entwicklung der Funktion $y(x_1)$ um x_0.*