Übungsblatt 2.

Abgabe bis: **Montag, 28.09.2020, 12:00**

Aufgabe 1 (epidemiologisches Modell | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
R'(x) &= 2I(x) - R(x) - d_R(x)R(x), \\
S'(x) &= b_S(x)N(x) + R(x) - e(x)S(x)\frac{E(x)+I(x)}{N(x)} - d_S(x)S(x), \\
E'(x) &= e(x)S(x)\frac{E(x)+I(x)}{N(x)} - 13E(x) - d_E(x)E(x), \\
I'(x) &= 13E(x) - 2I(x) - d_I(x)I(x), \\
N(x) &= R(x) + S(x) + E(x) + I(x),
\end{aligned}$$

auf dem Intervall $x \in [0,3]$. Dabei seien d_R, d_S, d_E, d_I, b_S und e vorgegebene, beschränkte Funktionen.

(a) Bringen Sie die Differentialgleichung in die Form: $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass das System zu gegebenen Anfangsdaten eindeutig lösbar ist.

Hinweis. *Dieses Modell ist ein modifiziertes SEIRS-Modells, welches aus der mathematischen Epidemiologie stammt und den Verlauf einer Infektionskrankheit in einer Population modelliert. S beziffert die Anzahl gesunder, anfälliger Individuen, E die infizierten, I die kranken und R die gesunden, (noch) immunen. Im Unterschied zu einem klassischen SEIRS-Modell ist in diesem Modell eine Populationsdynamik mitberücksichtigt.*

Aufgabe 2 (Stabilität der Lösung | 4 Punkte)**.**

Seien $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und sei $\mathbf{f}_1$ zusätzlich Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Variable mit Lipschitz-Konstante L. Sei weiter $\mathbf{y}_a \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $\mathbf{y}_1$ respektive $\mathbf{y}_2$ die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\mathbf{y}_i' = \mathbf{f}_i(x, \mathbf{y}_i), \quad \mathbf{y}_i(a) = \mathbf{y}_a$$

für $i = 1, 2$. Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$\big\|(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)(x)\big\| \le \frac{\varepsilon(x)}{L}\Big(e^{L|x-a|} - 1\Big) \quad \text{für alle } x \in [a,b],$$

wobei $\varepsilon(x) := \max\Big\{\big\|\mathbf{f}_1(z,\mathbf{y}) - \mathbf{f}_2(z,\mathbf{y})\big\| \,:\, (z,\mathbf{y}) \in [a,x] \times \mathbb{R}^n\Big\}$.

Hinweis. *Benutzen Sie den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung und wenden Sie folgende Aussage geschickt an: Seien $s \colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ eine stetige Funktion, $\alpha, \beta \ge 0$, so gilt:*

$$s(x) \le \alpha + \beta \int_a^x s(z)\,\mathrm{d}z \;\; \forall x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad s(x) \le \alpha e^{\beta|x-a|} \;\; \forall x \in [a,b].$$

Aufgabe 3 (Ableitungen von Differentialgleichungen | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei eine Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ mit f dreimal differenzierbar. Sei weiter y eine Lösung dieser Differentialgleichung, wobei y viermal differenzierbar ist.

(a) Beweisen Sie, dass dann auch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y'' &= f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y), \\ y''' &= f_{xx}(x,y) + f_{xy}(x,y)f(x,y) + f_{yx}(x,y)f(x,y) \\ &\quad + f_{yy}(x,y)f(x,y)f(x,y) + f_y(x,y)f_x(x,y) + f_y(x,y)f_y(x,y)f(x,y). \end{aligned}$$

gelten.

(b) Leiten Sie eine analoge Differentialgleichung für $y^{(4)}$ her.