Bonusblatt 13.

Bearbeiten bis: **Montag, 18.12.2023, 12:00.**

Die Aufgaben auf diesem Blatt geben Bonuspunkte für die Übungen.

Aufgabe 1 (Newton-Verfahren I | 4 Bonuspunkte).

(a) Führen Sie zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + 6x &= 2 \\ x^2 - y^2 + 3x &= 4 \end{aligned}$$

einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startvektor $(x_0, y_0) = (2, 4)$ durch.

(b) Es sei $a > 0$. Bestimmen Sie die Parameter p und q so, dass die nach der Vorschrift

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + pax_k}{qx_k^2 + a}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

erzeugte Folge $\{x_k\}$ lokal gegen $\sqrt{a}$ mit der Ordnung 3 konvergiert.

Aufgabe 2 (Newton-Verfahren II | 4 Bonuspunkte).

Gegeben sei ein Gleichungssystem

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \ \text{wobei } \mathbf{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Weiter definieren wir $\mathbf{G}(\mathbf{x}) := \mathbf{S}\mathbf{F}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem mit einer nichtsingulären Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für jeden Startwert $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ das gewöhnliche Newton-Verfahren die gesuchte Lösung $\mathbf{x}^\star$ von (1) nach nur einer Iteration liefert.

(b) Sei $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ nichtsingulär für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und sei $\mathbf{x}_0 = \overline{\mathbf{x}}_0$. Die Anwendung des gewöhnlichen Newton-Verfahrens

- auf $\mathbf{F}$ liefere die Folge $\{\mathbf{x}_i\}$,
- auf $\mathbf{G}$ liefere die Folge $\{\overline{\mathbf{x}}_i\}$.

Zeigen Sie: Fur alle $i \in \mathbb{N}$ ist $\mathbf{x}_i = \overline{\mathbf{x}}_i$.

(c) Für $n = 2$ sei

$$\mathbf{F}(x, y) := \begin{bmatrix} \exp(x^2 + y^2) - 3 \\ x + y - \sin\big(3(x + y)\big) \end{bmatrix}.$$

Für welche (x, y) ist $\mathbf{F}'$ singulär?

(d) Seien

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{c} \\ f(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\, n-1 \\ \}\, 1 \end{array},$$

$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ und $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ nichtsingulär für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Nullstelle $\mathbf{x}^\star$ von $\mathbf{F}$.

Aufgabe 3 (Symmetrisches Rang-1-Verfahren | 4 Bonuspunkte).

Für eine reguläre, symmetrische Matrix $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{y}_k, \mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^n$ mit $(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k\mathbf{s}_k)^\top \mathbf{s}_k \neq \mathbf{0}$ sei die Matrix $\mathbf{B}_{k+1}$ durch die SR1-Formel

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k\mathbf{s}_k)(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k\mathbf{s}_k)^\top}{(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k\mathbf{s}_k)^\top \mathbf{s}_k}$$

definiert. Nehmen Sie an, $\mathbf{B}_{k+1}$ ist invertierbar. Zeigen Sie für $\mathbf{H}_k := \mathbf{B}_k^{-1}$ und

$$\mathbf{H}_{k+1} := \mathbf{H}_k + \frac{(\mathbf{s}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{y}_k)(\mathbf{s}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{y}_k)^\top}{(\mathbf{s}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{y}_k)^\top \mathbf{y}_k}$$

die Identität $\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{B}_{k+1}^{-1}$. Nutzen Sie dabei die Sherman-Morrison-Formel: Für eine reguläre Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ mit $1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$ gilt

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\top\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$

Aufgabe 4 (Vandermonde-Matrix | 4 Bonuspunkte).

Die Vandermonde-Matrix $\mathbf{V}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist definiert gemäss

$$\mathbf{V}(x_1, x_2 \dots, x_n) := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\det \mathbf{V}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i).$$