Programmierblatt 3.

zu bearbeiten bis: **Freitag, 25.05.2018**

Problemstellung.
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $h, y_d \in L^2(\Omega)$ und $\lambda > 0$ gegeben. Für $y \in H_0^1(\Omega)$ und $u \in L^2(\Omega)$, betrachten wir die Optimalsteuerungsaufgabe

$$\left.\begin{array}{c} \text{minimiere } J(y,u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |y-y_d|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \dfrac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \text{unter den Nebendbedingungen } -\Delta y = u + h \text{ in } \Omega,\ y = 0 \text{ auf } \Gamma \\ \text{und } u_a \leq u \leq u_b \text{ in } \Omega. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Anstelle des projizierten Gradientenverfahrens wollen wir nun die primal-duale Aktive-Mengen-Strategie zur Lösung der Diskretisierung von (1) verwenden.

Numerische Umsetzung.
Um das Problem (1) zu diskretisieren, verwenden wir, wie auf den vorherigen Übungsblättern, stückweise konstante Finite Elemente für die Steuerung u und stückweise lineare, global stetige Finite Elemente für den Zustand y, den adjungierten Zustand p, den gewünschten Zustand y_d und die Hilfsfunktion h. Die daraus resultierenden Steifigkeits- und Massenmatrizen bezeichnen wir wie üblich mit $\mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{D}$.
Das diskretisierte Optimalitätssystem

$$\begin{aligned} &\mathbf{Ky} = \mathbf{Bu} + \mathbf{Mh}, \quad \mathbf{u}_a \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_b \\ &\mathbf{Kp} = \mathbf{M}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_d), \\ &(\lambda\mathbf{Du} + \mathbf{B}^\intercal\mathbf{p})^\intercal(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0, \qquad \text{für alle } \mathbf{u}_a \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{u}_b. \end{aligned}$$

lösen wir mit Hilfe der *primal-dualen Aktiven-Mengen-Strategie*. Mit

$$\boldsymbol{\mu} := -\big((\lambda\mathbf{D})^{-1}\mathbf{B}^\intercal\mathbf{p} + \mathbf{u}\big)$$

gilt für die Komponenten des optimalen Vektors $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}_i = \begin{cases} \mathbf{u}_{a,i}, & \text{falls } \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\mu}_i < \mathbf{u}_{a,i}, \\ \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{u}_i, & \text{falls } \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\mu}_i \in [\mathbf{u}_{a,i}, \mathbf{u}_{b,i}], \\ \mathbf{u}_{b,i}, & \text{falls } \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\mu}_i > \mathbf{u}_{b,i}, \end{cases} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n_T.$$

Die Grösse $\mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}$ ist also ein Indikator dafür, welcher der Nebenbedingungen gerade aktiv ist. Wählen wir als Startwerte $\mathbf{u}^{(0)} = \boldsymbol{\mu}^{(0)} = \mathbf{0}$, ergeben sich die aktiven bzw. inaktiven Mengen zu

$$\begin{aligned} A_k^a &= \Big\{ i \in \{1, \ldots, n_T\} : \mathbf{u}_i^{(k)} + \boldsymbol{\mu}_i^{(k)} < \mathbf{u}_{a,i} \Big\}, \\ A_k^b &= \Big\{ i \in \{1, \ldots, n_T\} : \mathbf{u}_i^{(k)} + \boldsymbol{\mu}_i^{(k)} > \mathbf{u}_{b,i} \Big\}, \\ I_k &= \{1, \ldots, n_T\} \setminus (A_k^a \cup A_k^b). \end{aligned}$$

Die entsprechenden charakteristischen Funktionen werden wie folgt in Matrizen übersetzt:

$$\mathbf{X}_{a,ii}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in A_k^a, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{X}_{b,ii}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in A_k^b, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit
$$\mathbf{E} := (\lambda \mathbf{D})^{-1}\big(\mathbf{I} - \mathbf{X}_a^{(k)} - \mathbf{X}_b^{(k)}\big)$$
ist schließlich in jedem Schritt das lineare Gleichungssystem
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{K} & -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}\mathbf{B}^\intercal & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{(k+1)} \\ \mathbf{y}^{(k+1)} \\ \mathbf{u}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}\mathbf{h} \\ -\mathbf{M}\mathbf{y}_d \\ \mathbf{X}_a^{(k)}\mathbf{u}_a + \mathbf{X}_b^{(k)}\mathbf{u}_b \end{bmatrix} \tag{2}$$
zu lösen. Hieraus lässt sich wiederum
$$\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} = -\big((\lambda \mathbf{D})^{-1}\mathbf{B}^\intercal \mathbf{p}^{(k+1)} + \mathbf{u}^{(k+1)}\big)$$
berechnen. Man kann zeigen, dass dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten konvergiert. Wenn sich beide aktiven Mengen erstmalig nicht mehr verändern, ist die Konvergenz erreicht und das Verfahren wird abgebrochen.

Algorithmus 1 Aktive-Mengen-Strategie

```
Setze p^(0) = u^(0) = μ^(0) = 0
Berechne X_a^(0) und X_b^(0)
for k = 1, 2, ... do
    Berechne E
    Löse (2)
    Berechne μ^(k)
    Berechne X_a^(k) und X_b^(k)
    if X_a^(k) = X_a^(k-1) und X_b^(k) = X_b^(k-1) then
        Brich das Verfahren ab
    end if
end for
```

Aufgabe 1.

(a) Schreiben Sie eine Funktion

```
[y,u,p] = optimal_control_active_set(...),
```

welche die Aktive-Mengen-Strategie mit Hilfe von Finiten Elementen implementiert.

(b) Gegeben seien die Funktionen
$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= 2\pi^2 \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) + \operatorname{sign}\big(-\sin(8\pi x_1)\sin(8\pi x_2)\big), \\ y_d(\mathbf{x}) &= \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) + \sin(8\pi x_1)\sin(8\pi x_2), \end{aligned}$$
die Box-Beschränkungen
$$-1 \le u(\mathbf{x}) \le 1,$$
$\Omega = (0,1)^2$ und $\lambda = 10^{-6}$. Lösen Sie das Problem (1) mit Hilfe der Aktiven-Mengen-Strategie. Um die Daten auf dem Gitter sinnvoll auflösen zu können, sollten mindestens drei Verfeinerungsstufen für die Triangulierung verwendet werden. Visualisieren Sie die Lösungen $\mathbf{p}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{u}$ auf Level 7. Die exakten Lösungen sind
$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{128\pi^2}\sin(8\pi x_1)\sin(8\pi x_2), \\ u(\mathbf{x}) &= -\operatorname{sign}\big(p(\mathbf{x})\big), \\ y(\mathbf{x}) &= \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2). \end{aligned}$$
Bestimmen Sie die Lösungen y_ℓ, p_ℓ von (1) auf den Leveln $\ell = 4, \dots, 8$. Berechnen Sie dann für alle ℓ die Fehler $\|y_\ell - y\|_{L^2(\Omega)}$ sowie $\|p_\ell - p\|_{L^2(\Omega)}$ und plotten Sie diese gegen die Anzahl der Level. y_ℓ sollte mindestens linear konvergieren, für p_ℓ sollte sich quadratische Konvergenz einstellen.