Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen Frühjahrsemester 2018

Programmierblatt 2.

zu bearbeiten bis: **Freitag, 20.04.2018**

Problemstellung.
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $h, y_d \in L^2(\Omega)$ und $\lambda > 0$ gegeben. Für $y \in H_0^1(\Omega)$ und $u \in L^2(\Omega)$, betrachten wir die Optimalsteuerungsaufgabe

$$\left.\begin{array}{c} \text{minimiere } J(y,u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |y-y_d|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \dfrac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \text{unter den Nebendbedingungen } -\Delta y = u + h \text{ in } \Omega,\ y = 0 \text{ auf } \Gamma \\ \text{und } u_a \le u \le u_b \text{ in } \Omega. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Problem (1) ist eindeutig lösbar, wobei die Steuerung u genau dann optimal, wenn sie gemeinsam mit dem Zustand y und dem adjungierten Zustand p dem Optimalitätssystem

$$\begin{array}{ll} -\Delta y = u + h & -\Delta p = y - y_d \\ y|_\Gamma = 0 & p|_\Gamma = 0 \\ \multicolumn{2}{c}{(p + \lambda u, v)_{L^2(\Omega)} \ge 0 \text{ für alle } v \in U_{ad}} \end{array} \tag{2}$$

genügt. Hierbei ist $U_{ad} = \big\{u \in L^2(\Omega) : u_a \le u \le u_b \text{ fast überall}\big\}$.

Numerische Umsetzung.
Um das Problem (2) zu diskretisieren, verwenden wir wieder stückweise konstante Finite Elemente für die Steuerung u und stückweise lineare, global stetige Finite Elemente für den Zustand y, den adjungierten Zustand p, die gewünschte Temperaturverteilung y_d und die Hilfsfunktion h. Die daraus resultierenden Steifigkeits- und Massenmatrizen bezeichnen wir wie in der vorherigen Programmieraufgabe mit $\mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{D}$.
Im Unterschied zur vorherigen Programmieraufgabe ist die Steuerung allerdings nun beschränkt und wir können das System (2) nicht direkt lösen. Stattdessen benutzen wir das *projizierte Gradientenverfahren* (siehe Algorithmus 1), um die Lösung anzunähern. Folgendes sei zu Algorithmus 1 bemerkt:

- Das Zielfunktional f ist definiert als $f(u) := J\big(y(u), u\big)$. Um also f zu berechnen, müssen wir zunächst die Zustandsgleichung $-\Delta y = u + h$ lösen und dann das Funktional J auswerten.
- $P_{[u_a,u_b]}(u)$ bezeichnet die Projektion von u in die Steuerbeschränkung, also

$$P_{[u_a,u_b]}\big(u(\mathbf{x})\big) = \begin{cases} u_a(\mathbf{x}), & \text{falls } u(\mathbf{x}) < u_a(\mathbf{x}), \\ u(\mathbf{x}), & \text{falls } u_a(\mathbf{x}) \le u(\mathbf{x}) \le u_b(\mathbf{x}), \\ u_b(\mathbf{x}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

- v_n ist der Antigradient des unrestringierten Problems (siehe Blatt 1). Damit der Term $u_n + sv_n$ die Restriktion in (1) erfüllt, muss die Projektion $P_{[u_a,u_b]}$ darauf angewendet werden. Die Gleichung $v_n = -(p_n + \lambda u_n)$ ist variationell zu verstehen. Wenden wir also Finite Elemente an, so ergibt sich $\mathbf{v}_n$ aus der Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{D}\mathbf{v}_n = -\Big(\mathbf{B}^\top \mathbf{p}_n + \lambda \mathbf{D}\mathbf{u}_n\Big).$$

Algorithmus 1 Projiziertes Gradientenverfahren

Input: Zielfunktional f, Kontrollkostenterm λ, gewünschter Zustand y_d, Hilfsfunktion h

Output: Zustand y_n, adjungierter Zustand p_n, Steuerung u_n

Wähle einen Startwert u_0

for $n = 0, 1, 2, \ldots$ **do**

    Berechne y_n gemäss der Zustandgleichung $-\Delta y_n = u_n + h$

    Berechne p_n gemäss der adjungierten Gleichung $-\Delta p_n = y_n - y_d$

    Berechne die Abstiegsrichtung v_n gemäss $v_n = -(p_n + \lambda u_n)$

    Setze $s = 1$

    while $f\big(P_{[u_a,u_b]}(u_n + sv_n)\big) > f(u_n) - \frac{1}{2}\big(v_n, P_{[u_a,u_b]}(u_n + sv_n) - u_n\big)_{L^2(\Omega)}$ **do**

        Setze $s = s/2$

    end while

    Setze $u_{n+1} = P_{[u_a,u_b]}(u_n + sv_n)$

end for

Aufgabe 1.

(a) Schreiben Sie eine Funktion

```
[y,u,p] = optimal_control_proj_grad(N,P,F,Bc,y_d,u_a,u_b,h,lambda),
```

welche das projizierte Gradientenverfahren mit Hilfe von Finiten Elementen implementiert und nach N Schritten abbricht.

(b) Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} y_d(\mathbf{x}) &= \left(1 + 2\pi^2\right)\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2), \\ h(\mathbf{x}) &= 2\pi^2 \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) - \min\left(1, \max\left(0.5, 2\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\right)\right), \end{aligned}$$

die Steuerungskontrolle

$$0.5 \leq u(\mathbf{x}) \leq 1,$$

$\Omega = (0,1)^2$ und $\lambda = \frac{1}{2}$. Approximieren Sie die Lösung des Systems (2) mit Hilfe des projizierten Gradientenverfahrens auf den Leveln $\ell = 1, \ldots, 7$. Als Startwert eignet sich $u_0(\mathbf{x}) = 0.75$. Das Verfahren soll nach $N = 50$ Schritten abgebrochen werden. Die exakten Lösungen sind

$$\begin{aligned} y(\mathbf{x}) &= \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) \\ p(\mathbf{x}) &= -\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) \\ u(\mathbf{x}) &= \min\left\{1, \max\left\{0.5, -2p(\mathbf{x})\right\}\right\} \end{aligned}$$

Berechnen sie für alle ℓ die Fehler $\|y_\ell - y\|_{L^2(\Omega)}$ sowie $\|p_\ell - p\|_{L^2(\Omega)}$ und plotten Sie diese gegen die Anzahl der Level.