Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen Frühjahrsemester 2018

Programmierblatt 1.

zu bearbeiten bis: **Freitag, 23.03.2018**

Problemstellung.
Vorgelegt sei die Optimalsteuerungsaufgabe

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimiere } J(y,u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |y-y_d|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \dfrac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}\mathbf{x} \\ \text{unter den Nebendbedingungen } -\Delta y = u \text{ in } \Omega \text{ und } y = 0 \text{ auf } \Gamma \end{array}\right\} \tag{1}$$

Dabei sind $y \in H_0^1(\Omega)$, $u, y_d \in L^2(\Omega)$, $\lambda > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Problem (1) ist eindeutig lösbar. Speziell ist die Steuerung u genau dann optimal, wenn sie gemeinsam mit dem Zustand y und dem adjungierten Zustand p dem Optimalitätssystem

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u & -\Delta p &= y - y_d \\ y|_\Gamma &= 0 & p|_\Gamma &= 0 \\ (p+\lambda u, v)_{L^2(\Omega)} &= 0 \text{ für alle } v \in L^2(\Omega) \end{aligned} \tag{2}$$

genügt.

Numerische Umsetzung.
Die Konstruktion numerischer Test-Beispiele vereinfacht sich erheblich, wenn wir in der Nebenbedingung in (1) auf der rechten Seite eine Hilfsfunktion $h \in L^2(\Omega)$ einführen. Das zugehörige Optimalitätssystem lautet nun

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u + h & -\Delta p &= y - y_d \\ y|_\Gamma &= 0 & p|_\Gamma &= 0 \\ (p+\lambda u, v)_{L^2(\Omega)} &= 0 \text{ für alle } v \in L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{3}$$

Um das Problem (3) zu diskretisieren, verwenden wir stückweise konstante finite Elemente für die Steuerung u und stückweise lineare, global stetige finite Elemente für den Zustand y und den adjungierten Zustand p. Dies führt auf den Ansatz

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_T} u_i \chi_i(\mathbf{x}), \quad y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_P} y_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_P} p_i \varphi_i(\mathbf{x}).$$

Dabei bezeichne n_T die Anzahl der Elemente der zugehörigen Triangulierung $\mathcal{T}$ für Ω mit den inneren Knoten $\mathbf{x}_i$ für $i = 1, \ldots, n_P$. Als Basisfunktion χ_i nehmen wir die charakteristische Funktion auf dem i-ten Dreieck der Triangulierung $\mathcal{T}$. Die Funktionen φ_i sind die bekannten Hutfunktionen zu den Knotenpunkten $\mathbf{x}_i$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle Basisfunktionen in $L^\infty(\Omega)$ auf 1 normiert sind.

Die Diskretisierung der gewünschten Temperaturverteilung y_d und der Hilfsfunktion h vereinfacht sich, wenn wir beide mittels stückweise linearer finiter Elemente interpolieren. Die zugehörigen Knotenvektoren seien $\mathbf{y}_d := [y_d(\mathbf{x}_i)]_{i=1}^{n_P}$ und $\mathbf{h} := [h(\mathbf{x}_i)]_{i=1}^{n_P}$. Die Knotenvektoren der anderen auftretenden Funktionen werden wir ebenfalls mit fett gedruckten Buchstaben bezeichnen:

$$\mathbf{u} := [u_i]_{i=1}^{n_T}, \quad \mathbf{y} := [y_i]_{i=1}^{n_P}, \quad \mathbf{p} := [p_i]_{i=1}^{n_P}.$$

Wir benötigen ferner die Finite-Elemente-Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ und die zugehörige Massenmatrix $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{K} := \left[\int_\Omega \nabla\varphi_j \nabla\varphi_i \mathrm{d}\mathbf{x} \right]_{i,j=1}^{n_P} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{M} := \left[\int_\Omega \varphi_i \varphi_j \mathrm{d}\mathbf{x} \right]_{i,j=1}^{n_P}. \tag{4}$$

Außerdem benötigen wir noch die Matrix $\mathbf{B}$, die lineare und konstante Finite Elemente koppelt und die Massenmatrix $\mathbf{D}$ für stückweise konstante Finite Elemente. Diese sind gegeben durch

$$\mathbf{B} := \left[\int_\Omega \chi_j \varphi_i \mathrm{d}\mathbf{x} \right]_{i,j=1}^{n_P,n_T} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{D} := \left[\int_\Omega \chi_i \chi_j \mathrm{d}\mathbf{x} \right]_{i,j=1}^{n_T}. \tag{5}$$

Aufgabe 1.

(a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zum Optimalitätssystem (3) auf. Beachten Sie, dass auf die ersten beiden Gleichungen stückweise lineare Testfunktionen angewendet werden und auf die letzte Gleichung stückweise konstante Testfunktionen. **Hinweis:** Es ist etwas einfacher, zuerst (2) zu diskretisieren und dann (3).

(b) Schreiben Sie zwei Funktionen

```
function B = mass_lin_const(P,F,bc),
function D = mass_const(P,F,bc),
```

um die Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{D}$ zu generieren. Schreiben Sie dann eine Funktion

```
function [y,u,p] = optimal_control_no_bounds(...),
```

die das in (a) hergeleitete Gleichungssystem aufstellt und mithilfe des Backslash-Operators löst. Sie dürfen dazu Ihre bereits implementierten Funktionen `stiffness` und `mass` aus dem vorherigen Semester verwenden. Implementieren Sie auch eine Funktion

```
function vis_func_const(u,P,F)
```

um Funktionen zu visualisieren, die mit stückweise konstanten Basisfunktionen diskretisiert wurden.

Aufgabe 2.

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= 2\pi^2 \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) - \frac{1}{128\pi^2\lambda}\sin(8\pi x_1)\sin(8\pi x_2), \\ y_d(\mathbf{x}) &= \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) + \sin(8\pi x_1)\sin(8\pi x_2), \end{aligned}$$

$\Omega = (0,1)^2$ und $\lambda = 10^{-3}$. Die dazugehörigen Lösungen des Systems (3) sind

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{128\pi^2}\sin(8\pi x_1)\sin(8\pi x_2), \\ u(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\lambda}\big(p(\mathbf{x})\big), \\ y(\mathbf{x}) &= \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2). \end{aligned}$$

(a) Approximieren Sie die Lösung des Systems (3) auf Level 6 und visualisieren Sie diese. Auch hier dürfen Sie wieder Ihre Funktionen aus dem vorherigen Semester verwenden.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen y_ℓ, p_ℓ von (3) auf den Leveln $\ell = 1, \ldots, 8$. Berechnen sie dann für alle ℓ die Fehler $\|y_\ell - y\|_{L^2(\Omega)}$ sowie $\|p_\ell - p\|_{L^2(\Omega)}$ und plotten Sie diese gegen die Anzahl der Level. Ab dem fünften Level sollte sich quadratische Konvergenz sowohl für y_ℓ als auch für p_ℓ einstellen.