Übungsblatt 6.

Abgabe bis: **Freitag, 20.04.2018, 12:00**

Aufgabe 1 (Box-Beschränkungen in Finite-Element-Räumen | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, polygonales Gebiet und $\mathcal{T}$ eine beliebige Triangulierung davon. Seien weiter $\{T_i\}_{i=1}^{n_t} = \mathcal{T}$ eine Enumeration der Dreiecke in $\mathcal{T}$ sowie $\{\mathbf{p}_j\}_{j=1}^{n_p} \subset \mathbb{R}^d$ eine Enumeration der Eckpunkte der Dreiecke in $\mathcal{T}$. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir durch

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{T}}^{(k)} &:= \big\{v \in L^2(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}_k(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\big\} \quad \text{und} \\ V_{\mathcal{T}}^{(k)} &:= \big\{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_k(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\big\}, \end{aligned}$$

jeweils den Raum der stückweise $\mathcal{P}_k$-Finite-Element-Funktionen sowie den Raum der stetigen, stückweise $\mathcal{P}_k$-Finite-Element-Funktionen.

(a) Seien $v, u \in U_{\mathcal{T}}^{(0)}$ mit den zugehörigen Koordinatenvektoren $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ bezüglich der Basis $\big\{\chi_{T_i}\big\}_{i=1}^{n_t}$. Zeigen Sie, $v \leq u$ gilt genau dann, wenn eintragsweise $\mathbf{v} \leq \mathbf{u}$ gilt.

(b) Seien $v, u \in V_{\mathcal{T}}^{(1)}$ mit den zugehörigen Koordinatenvektoren $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ bezüglich der nodalen Basis $\big\{\varphi_j\big\}_{j=1}^{n_p}$, d.h. $\varphi_j(\mathbf{p}_k) = \delta_{j,k}$. Zeigen Sie, $v \leq u$ gilt genau dann, wenn eintragsweise $\mathbf{v} \leq \mathbf{u}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass Aussage (b) nicht gilt, wenn für ein $k \geq 2$ anstatt des Raumes $V_{\mathcal{T}}^{(1)}$ der Raum $V_{\mathcal{T}}^{(k)}$ mit seiner nodalen Basis betrachtet wird.

Aufgabe 2 (L^2-Projektion und Box-Beschränkungen | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Für einen endlich-dimensionalen Unterraum $V \subset L^2(\Omega)$ ist die L^2-Projektion $\Pi_V u$ eines $u \in L^2(\Omega)$ auf V definiert als $\Pi_V u \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt

$$\big(\Pi_V u, v\big)_{L^2(\Omega)} = \big(u, v\big)_{L^2(\Omega)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Pi_V \colon L^2(\Omega) \to V$ wohldefiniert ist und dass gilt:

$$\Pi_V u = \underset{v \in V}{\arg\min} \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Seien nun Ω ein polygonales Gebiet und $\mathcal{T}$ eine beliebige Triangulierung davon.

(b) Zeigen Sie, aus $u, w \in L^2(\Omega)$ mit $u \geq w$ fast überall folgt $\Pi_{U_{\mathcal{T}}^{(0)}} u \geq \Pi_{U_{\mathcal{T}}^{(0)}} w$ fast überall.

(c) Widerlegen Sie, aus $u, w \in L^2(\Omega)$ mit $u \geq w$ fast überall folgt $\Pi_{U_{\mathcal{T}}^{(1)}} u \geq \Pi_{U_{\mathcal{T}}^{(1)}} w$ fast überall.

Hinweis. *Es reicht bei (c)* $\Omega = (0, 2)$, $\mathcal{T} = \{\Omega\}$, $w(x) = 1$ *und* $u(x) = \max\{x, 1\}$ *zu betrachten.*

Aufgabe 3 ($\widetilde{H}^{-1}$ und H^{-1} | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-glattem Rand Γ.

(a) Zeigen Sie, dass $H_0^1(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt.

(b) Daher hat man wegen Aufgabe 4 folgende Kette stetiger, linearer Abbildungen

$$H_0^1(\Omega) \overset{j}{\hookrightarrow} H^1(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \overset{i'}{\hookrightarrow} \widetilde{H}^{-1}(\Omega) \overset{j'}{\to} H^{-1}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass j' nicht injektiv ist. Betrachten Sie dazu für $v \in L^2(\Gamma)$ jeweils die $\ell_v \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ definiert durch

$$\begin{aligned} \ell_v \colon H^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_\Gamma \gamma(u) v \, \mathrm{d}\sigma, \end{aligned}$$

wobei $\gamma \colon H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ den Spuroperator bezeichnet.

Aufgabe 4 (Gelfandscher Dreier revisited | 4 Punkte)**.**

Seien V, H Hilbert-Räume mit der stetigen Einbettungen $i \colon V \hookrightarrow H$. Sei weiter $U \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum mit $j \colon U \hookrightarrow V$ der kanonischen Einbettung und $i \circ j(U) \subset H$ dicht.

(a) Zeigen Sie, dass $i \circ j \colon U \hookrightarrow H$ und $i \colon V \hookrightarrow H$ dichte, stetige Einbettungen sind.

(b) Zeigen Sie, dass $j' \colon V' \hookrightarrow U', \ \ell \mapsto \ell \circ j$ eine stetige, lineare Abbildung ist.

(c) Schliessen Sie, dass man folgende Kette stetiger, linearer Abbildungen erhält,

$$U \overset{j}{\hookrightarrow} V \overset{i}{\hookrightarrow} H \overset{i'}{\hookrightarrow} V' \overset{j'}{\to} U',$$

wobei $i \circ j$, i, i' und $(i \circ j)' = j' \circ i'$ dichte, stetige Einbettungen sind.

Hinweis. *Vergleiche Aufgabe 4 des Übungsblattes 3 des letzten Semesters.*