Universität
Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht

**Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen** Frühjahrsemester 2018

# Übungsblatt 1.

Abgabe bis: **Freitag, 09.03.2018, 12:00**

**Aufgabe 1** (Differentiale | 4 Punkte)**.**

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $J\colon \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \mapsto J(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ stetig partiell nach $\mathbf{y}$ und $\mathbf{u}$ differenzierbar.

(a) Beweisen Sie, dass $J$ total differenzierbar ist, mit

$$J'(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) & J_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}.$$

Ist $J'$ stetig?

Hinweis. *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

(b) Sei nun $\mathbf{S}\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine nach jeder Richtung differenzierbare Funktion, das heisst

$$\delta_{\mathbf{v}} \mathbf{S}(\mathbf{u}) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \big[ \mathbf{S}(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) - \mathbf{S}(\mathbf{u}) \big]$$

existiert für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} \in U$. Beweisen Sie, dass $f\colon U \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \mapsto J(\mathbf{S}(\mathbf{u}), \mathbf{u})$ ebenfalls eine nach jeder Richtung differenzierbare Funktion ist, mit

$$\delta_{\mathbf{v}} f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{y}}(\mathbf{S}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) & J_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{v}} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}.$$

**Aufgabe 2** (endlich-dimensionale Optimierung I | 4 Punkte)**.**

Seien $U_{ad} \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und abgeschlossen, $\mathbf{S}\colon U_{ad} \to \mathbb{R}^m$ und $J\colon \mathbb{R}^m \times U_{ad} \to \mathbb{R}$ stetig, sowie $f\colon U_{ad} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \mapsto J(\mathbf{S}(\mathbf{u}), \mathbf{u})$.

(a) Gibt es ein $\mathbf{u}_0 \in U_{ad}$ und ein $r > 0$, so dass $f(\mathbf{u}) \geq f(\mathbf{u}_0)$ für alle $\mathbf{u} \in U_{ad} \setminus \overline{B_r(\mathbf{u}_0)}$ gilt. Zeigen Sie, dass dann für die Optimierungsaufgabe

$$\text{minimiere } f(\mathbf{u}) \text{ unter der Nebenbedingung } \mathbf{u} \in U_{ad}$$

mindestens eine global optimale Lösung $\mathbf{u}^\star$ existiert.

(b) Seien $J$ stetig partiell nach $\mathbf{y}$ und $\mathbf{u}$ sowie $\mathbf{S}$ nach jeder Richtung $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Bezeichne $\mathbf{u}^\star \in U_{ad} \setminus \partial U_{ad}$ eine lokal optimale Steuerung. Zeigen Sie, dass

$$\begin{bmatrix} J_{\mathbf{y}}(\mathbf{S}(\mathbf{u}^\star), \mathbf{u}^\star) & J_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}(\mathbf{u}^\star), \mathbf{u}^\star) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{v}} \mathbf{S}(\mathbf{u}^\star) \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \geq 0$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Hinweis. *Beweis durch Widerspruch respektive Kontrapositionsbeweis.*

(c) Sei bei (b) die Abbildung $\mathbf{v} \mapsto \delta_{\mathbf{v}} \mathbf{S}(\mathbf{u}^\star)$ zusätzlich linear, schliessen Sie, dass sogar

$$\begin{bmatrix} J_{\mathbf{y}}(\mathbf{S}(\mathbf{u}^\star), \mathbf{u}^\star) & J_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}(\mathbf{u}^\star), \mathbf{u}^\star) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{v}} \mathbf{S}(\mathbf{u}^\star) \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = 0$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

**Aufgabe 3** (endlich-dimensionale Optimierung II | 4 Punkte)**.**

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beliebig, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch positiv semidefinit, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$. Beweisen Sie, dass die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{minimiere } & J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) := (\mathbf{y} - \mathbf{w})^\mathsf{T} \mathbf{M} (\mathbf{y} - \mathbf{w}) + \mathbf{u}^\mathsf{T} \mathbf{R} \mathbf{u} \\ \text{unter der Nebenbedingung } & \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{u} \end{aligned}$$

für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige global optimale Lösung $(\mathbf{y}^\star, \mathbf{u})$ besitzt.

Hinweis. *Aufgabe 2.*

**Aufgabe 4** (Kompaktheit und Konvexität | 4 Punkte)**.**

Seien $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $D \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe und beschränkte Menge. Man beweise die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) und überlege sich, ob diese beiden Aussagen auch zu (c) äquivalent sind.

(a) $f$ ist gleichmässig konvex auf $D$.

(b) Es existieren Konstanten $\underline{c} > 0$ und $\overline{c} > 0$ mit

$$\underline{c} \|\mathbf{d}\|_2^2 \le \mathbf{d}^\mathsf{T} \operatorname{Hess} f(\mathbf{x}) \mathbf{d} \le \overline{c} \|\mathbf{d}\|_2^2$$

für alle $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\mathbf{x} \in D$.

(c) $f$ ist strikt konvex auf $D$.

Hinweis. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Die Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ heisst* ***konvex*** *auf $D$, wenn für alle $\lambda \in (0,1)$ und alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ gilt*

$$f\big(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\big) \le \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}).$$

*Gilt für $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ sogar stets die strikte Ungleichung, dann heisst die Funktion* ***strikt konvex****. Gibt es ein $\mu > 0$, so dass*

$$f\big(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\big) + \mu \lambda (1-\lambda) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \le \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$$

*für alle $\lambda \in (0,1)$ und alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ gilt, dann heisst die Funktion $f$* ***gleichmässig konvex****.*