Übungsblatt 9.

Abgabe bis: **Dienstag, 28.04.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Fredholmsche Alternative | 4 Punkte)**.**

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die *Fredholmsche Alternative*:
Entweder ist die Gleichung

$$\lambda\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

eindeutig lösbar oder es gibt $m = \dim\big(\ker(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\big)$ linear unabhängige Lösungen der homogen Gleichung

$$\lambda\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

und (1) ist genau dann lösbar, wenn $\mathbf{b} \perp \ker(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^\intercal)$.

Aufgabe 2 (Abbildungseigenschaften | 4 Punkte)**.**

(a) Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet. Für $s \in [-1, 0]$ ist das Newton-Potential $\widetilde{\mathcal{N}} : \widetilde{H}^s(\Omega) \to H^{s+2}(\Omega)$ stetig, d.h. es gilt

$$\|\widetilde{\mathcal{N}} f\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{\widetilde{H}^s(\Omega)} \quad \text{für alle } f \in \widetilde{H}^s(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass dies auch für $s \in [-2, -1]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für $|s| < \frac{1}{2}$ der Einfachschichtoperator $\mathcal{V} : H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$ beschränkt ist, d.h. es gilt

$$\|\mathcal{V}w\|_{H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma)} \leq c\|w\|_{H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)} \quad \text{für alle } w \in H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma).$$

Aufgabe 3 (Doppelschichtpotential | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Lipschitz-Rand Γ. Bestimmen Sie die Werte des Doppelschichtpotentials $(\widetilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x})$ auf Ω bzw. auf Ω^c für die Dichte $\rho \equiv 1 \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Hinweis. *Sie müssen nicht zeigen, dass Ihre erhaltenen Werte eindeutig sind.*

Aufgabe 4 (Newton-Potential | 4 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass für die Abbildung $(\mathcal{N}_1 f)(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$ die Darstellung

$$(\mathcal{N}_1 f)(\mathbf{x}) = \big((\sigma - 1)\mathbf{I} + \mathcal{K}^\star\big)\mathcal{V}^{-1}(\mathcal{N}_0 f)(\mathbf{x})$$

gilt.