Übungsblatt 8.

Abgabe bis: **Dienstag, 21.04.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Hypersingulärer Operator in 2D | 4 Punkte)**.**

Sei Γ eine glatte Kurve und seien ρ und μ global stetige und differenzierbare Funktionen auf Γ. Zeigen Sie, dass dann für den hypersingulären Operator in zwei Dimensionen

$$(\mathcal{W}\rho,\mu)_\Gamma = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \operatorname{rot}_\Gamma \mu(\mathbf{x}) \int_\Gamma \log\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \operatorname{rot}_\Gamma \rho(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\sigma_\mathbf{x}\,\mathrm{d}\sigma_\mathbf{y}$$

gilt.

Hinweis. *Es gilt*

$$\operatorname{rot}_\Gamma v(\mathbf{x}) := \mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot \operatorname{rot}\widetilde{v}(\mathbf{x}),$$

wobei $\widetilde{v}$ eine geeignet gewählte Fortsetzung von v in die zweidimensionale Umgebung von Γ ist. Damit beschreibt Aufgabe 1 auf Blatt 7 eine partielle Integration.

Aufgabe 2 (Kollokations- und Galerkin-Verfahren | 4 Punkte)**.**

Das Intervall $I = [a,b]$ sei für $n \in \mathbb{N}$ durch $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ in n Teilintervalle $I_k := [x_{k-1},x_k)$ für $k = 1,\ldots,n-1$ und $I_n := [x_{n-1},x_n]$ zerlegt. Weiter seien Kollokationspunkte $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ mit $\xi_k \in I_k$ für $k = 1,\ldots,n$ gegeben. Auf den Intervallen seien stückweise konstante Ansatzfunktionen $\varphi_k(x) := \chi_{I_k}(x)$ definiert. Berechnen Sie für die Kernfunktion $k(x,y) := 1/\sqrt{|x-y|}$ die Matrixeinträge

$$\beta_{i,j}^{\mathrm{Koll}} = \int_I k(\xi_i,y)\varphi_j(y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{des Kollokationsverfahrens,}$$

$$\beta_{i,j}^{\mathrm{Gal}} = \int_I \varphi_i(x)\int_I k(x,y)\varphi_j(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \text{des Galerkinverfahrens.}$$

Geben Sie Vereinfachungen an, wenn im äquidistanten Fall $I = [0,1]$, $h = 1/n$, $x_j = jh$ für $j = 0,\ldots,n$ und $\xi_k = \big(k-1/2\big)h$ für $k = 1,\ldots,n$ gilt.

Aufgabe 3 (Hilbert-Schmidt-Operatoren | 4 Punkte)**.**

Es seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ Gebiete und $k \in L^2(\Omega_1\times\Omega_2)$, das heisst, $k : \Omega_1\times\Omega_2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\|k\| := \left[\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} k(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right]^{1/2} < \infty.$$

Dann ist durch

$$(Kf)(\mathbf{x}) := \int_{\Omega_2} k(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

der *Hilbert-Schmidt-Operator* $K \in \mathcal{L}\big(L^2(\Omega_2),L^2(\Omega_1)\big)$ zum *Integralkern* k definiert. Zeigen Sie, dass K kompakt ist.

Hinweis. *Der $L^2(\Omega_2)$ ist ein separabler Hilbert-Raum und besitzt demnach eine Orthonormalbasis. Führen Sie die Projektionen P_n auf den Raum, der von den ersten n Basisfunktionen aufgespannt wird, ein und zeigen Sie, dass KP_n kompakt ist. Um den Beweis zu schliessen, dürfen Sie dann folgende Aussage benutzen: Seien X und Y Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Dann gilt $T \in \mathcal{K}(X;Y)$ genau dann wenn es $T_n \in \mathcal{L}(X;Y)$ gibt mit $\dim\big(\operatorname{img}(T_n)\big) < \infty$, so dass $\|T-T_n\| \to 0$ für $n \to \infty$.*

Aufgabe 4 (Cauchy-Hauptwert | 4 Punkte)**.**

Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die für beliebiges $\varepsilon > 0$ auf $[a, c-\varepsilon] \cup [c+\varepsilon, b]$ integrierbar ist, ist der *Cauchy-Hauptwert* definiert als

$$\fint_a^b f(y)\,\mathrm{d}y := \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{c+\varepsilon}^b f(y)\,\mathrm{d}y \right\}.$$

Zeigen Sie, dass der Cauchy-Hauptwert eines Integrals im Allgemeinen nicht invariant unter der Substitutionsregel ist.