Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht

Integralgleichungen und Randelemente Frühjahrsemester 2020

Übungsblatt 7.

Abgabe bis: **Dienstag, 14.04.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Rotation | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit einem geschlossenem Rand $\Gamma = \partial\Omega$, der durch ein stetig differenzierbare Parametrisierung $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \Gamma$ gegeben ist. Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ist die Rotation einer skalaren Funktion v gegeben als

$$\operatorname{rot} v(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_2} v(\mathbf{x}) \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_1} v(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für stetige differenzierbare Funktionen v und w die Identität

$$\int_\Gamma v(\mathbf{x}) \langle \mathbf{n}_\mathbf{x}, \operatorname{rot} w(\mathbf{x}) \rangle \,\mathrm{d}\sigma_\mathbf{x} = -\int_\Gamma \langle \mathbf{n}_\mathbf{x}, \operatorname{rot} v(\mathbf{x}) \rangle w(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\sigma_\mathbf{x}$$

gilt, wobei $\mathbf{n}_\mathbf{x}$ wie üblich die äussere Normale am Punkt $\mathbf{x} \in \Gamma$ bezeichne.

Aufgabe 2 (kompakte Operatoren I | 4 Punkte)**.**

Seien X und Y Banach-Räume über $\mathbb{R}$ und $K \in \mathcal{L}(X, Y)$, dem Raum der linearen und stetigen Operatoren. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Eigenschaften äquivalent sind:

1. $\overline{K\big(B_1(0)\big)}$ ist kompakt in Y.
2. $M \subset X$ beschränkt $\Longrightarrow \overline{K(M)}$ ist kompakt in Y.
3. Für jede beschränkte Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X besitzt $\{Kx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Operatoren, welche die obigen Eigenschaften erfüllen, heissen *kompakte Operatoren.* Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{K}(X, Y) := \{K \in \mathcal{L}(X, Y) : K \text{ ist kompakt}\}$$

die Menge der kompakten Operatoren.

Aufgabe 3 (kompakte Operatoren II | 4 Punkte)**.**

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(X, Y)$.
2. Ist $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\dim\big(\operatorname{img}(K)\big) < \infty \Longrightarrow K \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Aufgabe 4 (Cauchy-Hauptwert | 4 Punkte)**.**

Betrachten Sie die Funktion

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| > \epsilon, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_ϵ im distributionellen Sinn für $\epsilon \to 0$ konvergiert. Den Grenzwert bezeichnen wir als Cauchy-Hauptwert $p.v.\ 1/x$. Hierbei $p.v.$ steht für *principal value.* Schliessen Sie, dass $p.v.\ 1/x$ eine Distribution ist.

Hinweis. *Falls* $\{u_j\}$ *eine Folge von Distributionen in* Ω *ist und für alle* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *die Folge* $\langle u_j, \varphi\rangle$ *gegen einen Grenzwert konvergiert, den man mit* $\langle u, \varphi\rangle$ *bezeichnet, so ist* u *eine Distribution.*