Übungsblatt 6.

Abgabe bis: **Dienstag, 07.04.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Gelfandscher Dreier revisited | 4 Punkte)**.**

Seien V, H Hilbert-Räume mit der stetigen Einbettungen $i\colon V \hookrightarrow H$. Sei weiter $U \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum mit $j : U \hookrightarrow V$ der kanonischen Einbettung und $i \circ j(U) \subset H$ dicht.

(a) Zeigen Sie, dass $i \circ j : U \hookrightarrow H$ und $i\colon V \hookrightarrow H$ dichte, stetige Einbettungen sind.

(b) Zeigen Sie, dass $j'\colon V' \hookrightarrow U',\ \ell \mapsto \ell \circ j$ eine stetige, lineare Abbildung ist.

(c) Schliessen Sie, dass man folgende Kette stetiger, linearer Abbildungen erhält,

$$U \overset{j}{\hookrightarrow} V \overset{i}{\hookrightarrow} H \overset{i'}{\hookrightarrow} V' \overset{j'}{\to} U',$$

wobei $i \circ j$, i, i' und $(i \circ j)' = j' \circ i'$ dichte, stetige Einbettungen sind.

Hinweis. *Vergleiche Aufgabe 4 des Übungsblattes 5 des letzten Semesters.*

Aufgabe 2 ($\widetilde{H}^{-1}$ und H^{-1} | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-glattem Rand Γ.

(a) Zeigen Sie, dass $H_0^1(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt.

(b) Daher hat man wegen Aufgabe 1 folgende Kette stetiger, linearer Abbildungen

$$H_0^1(\Omega) \overset{j}{\hookrightarrow} H^1(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \overset{i'}{\hookrightarrow} \widetilde{H}^{-1}(\Omega) \overset{j'}{\to} H^{-1}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass j' nicht injektiv ist. Betrachten Sie dazu für $v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ jeweils die $\ell_v \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ definiert durch

$$\begin{aligned} \ell_v\colon H^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_\Gamma \gamma_0^{\text{int}}(u) v \,\mathrm{d}\sigma, \end{aligned}$$

wobei $\gamma_0^{\text{int}}\colon H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ den Spuroperator bezeichnet.

Aufgabe 3 (Eigenwerte des Einfachschichtoperators | 4 Punkte)**.**

Sei $\rho \in L^\infty(\Gamma)$. Zeigen Sie, dass sich der Einfachschichtoperator auf dem Einheitskreis schreiben lässt gemäß

$$(V\rho)(s) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \log\Big(4 \sin^2\big(\pi(s-t)\big)\Big) \rho(t) \,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie weiter, dass die Funktionen $\rho_k(s) = \cos(2\pi k s)$ und $\rho_{-\ell}(s) = \sin(2\pi \ell s)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ beziehungsweise $\ell \in \mathbb{N}$ die Eigenfunktionen des Einfachschichtoperators sind. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte?

Aufgabe 4 (Wärmeleitungsgleichung | 4 Punkte)**.**

In dieser Aufgabe betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t v - \Delta v &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ v &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{aligned}$$

für $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei

$$G(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}\right) & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t < 0. \end{cases}$$

Sei $u(\mathbf{x},t)$ gegeben durch

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y}) \,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\big)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$

$$\partial_t u(\mathbf{x},t) - \Delta u(\mathbf{x},t) = 0$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\substack{(\mathbf{x},t)\to(\mathbf{x}_0,0) \\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\, t>0}} u(\mathbf{x},t) = g(\mathbf{x}_0)$$

für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Hinweis. *Sie dürfen benutzen, dass*

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(\mathbf{x},t) \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$$

für jeden Zeitpunkt $t > 0$ gilt.