Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht

Integralgleichungen und Randelemente Frühjahrsemester 2020

Übungsblatt 5.

Abgabe bis: **Dienstag, 31.03.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Fundamentallösung | 4 Punkte).

Für die Herleitung der Fundamentallösung haben wir die Gleichung

$$\frac{\operatorname{Si}\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} - \Delta_{\mathbf{z}}\left[\frac{1}{2}\frac{\sin\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} + \frac{1}{2}\cos\|\mathbf{z}\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|\operatorname{Si}\|\mathbf{z}\|\right] = 0$$

benötigt. Zeigen Sie, dass diese für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ erfüllt ist.

Aufgabe 2 (Greensche Formel | 4 Punkte).

Sei $\mathcal{L}$ ein linearer, elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung der Form

$$\mathcal{L}u := -\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u) + \langle \mathbf{b}, \nabla u\rangle + cu$$

auf einem glatten, beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ in den Einträgen konstant und $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls konstant sei. Es gilt $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$.

(i) Wie sieht der zu $\mathcal{L}$ adjungierte Operator $\mathcal{L}^\star$ aus?

Hinweis. *Via Gelfandschem Dreier können wir das Dualitätsprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$ formal als L^2-Innenprodukt interpretieren.*

(ii) Analog zu der ersten und zweiten Greenschen Formel lassen sich für diesen Operator verallgemeinerte Greensche Formeln angeben. Wie lauten diese beiden Formeln?

Aufgabe 3 (gemischte Randbedingungen | 4 Punkte).

Wir betrachten die Poisson-Gleichung auf dem glatten, beschränkten Gebiet Ω mit gemischten Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega,\\ \gamma_0^{\text{int}} u &= g_D \ \text{ auf } \Gamma_D,\\ \gamma_1^{\text{int}} u &= g_N \ \text{ auf } \Gamma_N, \end{aligned}$$

wobei $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ und $\partial\Omega =: \Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$ ist. Zudem ist vorausgesetzt, dass Γ_D keine Nullmenge in Γ ist. Seien $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$, $g_D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ und $g_N \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$.

(i) Wie lautet die zugehörige Variationsformulierung?

(ii) Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Hinweis. *Sie können benutzen, dass es zu $h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ eine Erweiterung $\tilde{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gibt mit*

$$\|\tilde{h}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \le C\|h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)}.$$

Erinnern Sie sich zudem an Aufgabe 3, Blatt 2, aus dem letzten Semester.

Aufgabe 4 (Newton-Potential | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Für ein Polynom $p(\mathbf{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq n} c_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ vom Grad n und eine Funktion $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ betrachten wir das inhomogene Dirichlet-Problem

$$-\Delta u = p \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \Gamma.$$

Führen Sie dieses Problem auf ein homogenes Dirichlet-Problem

$$\Delta \widetilde{u} = 0 \text{ in } \Omega, \quad \widetilde{u} = \widetilde{g} \text{ auf } \Gamma$$

zurück. Wie sieht die Lösung u des ursprünglichen Problems dann aus?