Übungsblatt 4.

Abgabe bis: **Dienstag, 24.03.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (trigonometrische Interpolation | 4 Punkte)**.**

Im Intervall $I = [0,1]$ seien n äquidistant verteilte Stützstellen $t_k = k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, gegeben, wobei $n = 2m$ sei. Das trigonometrische Interpolationspolynom vom Grad $2m$ einer auf $[0,1]$ periodischen Funktion $u(t)$ lautet

$$u(t) \approx \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \big[\alpha_k \cos(2\pi k t) + \beta_k \sin(2\pi k t)\big] + \frac{\alpha_m}{2}\cos(2\pi m t)$$

mit den Koeffizienten

$$\alpha_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{n-1} u(t_j)\cos(2\pi k t_j), \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

$$\beta_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{n-1} u(t_j)\sin(2\pi k t_j), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Zeigen Sie, dass die trigonometrischen Lagrange-Polynome $L_j(t)$ vom Grad $2m$, charakterisiert durch $L_j(t_i) = \delta_{i,j}$ für $j = 0, \ldots, n-1$, gegeben sind durch

$$L_j(t) = \frac{1}{n}\sin\big(2\pi m(t-t_j)\big)\cot\left(\frac{2\pi(t-t_j)}{2}\right).$$

Hinweis. *Verwenden Sie die Identität*

$$1 + 2\sum_{k=1}^{m-1}\exp(ikt) + \exp(imt) = i\big(1-\exp(imt)\big)\cot\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Aufgabe 2 (Quadratur | 4 Punkte)**.**

Im Intervall $I = [0,1]$ seien n äquidistant verteilte Stützstellen $t_k = k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, gegeben, wobei $n = 2m$ sei. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\omega_j := \int_0^1 L_j(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$$

und

$$\omega_j^i := \int_0^1 L_j(t)\omega(t_j,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left[\log 4 + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{2}{k}\cos\left(2\pi k\frac{i-j}{n}\right) + \frac{1}{m}\cos\left(2\pi m\frac{i-j}{n}\right)\right],$$

mit

$$\omega(s,t) := -\log\Big(\sin^2\big(\pi(s-t)\big)\Big).$$

Hierbei bezeichnen $L_j(t)$ die zugehörigen trigonometrischen Lagrange-Polynome vom Grad $2m$.

Hinweis. *Verwenden Sie die Identität*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right)\exp(imt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & \textit{falls } m = 0,\\ -1/|m|, & \textit{falls } m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.\end{cases}$$

Aufgabe 3 (stetige Operatoren | 4 Punkte)**.**

Seien E, F Banach-Räume und $T \in \mathcal{L}(E, F)$ injektiv mit stetiger Umkehrabbildung

$$T^{-1} : T(E) \to E.$$

Zeigen Sie, dass $T(E)$ in F abgeschlossen ist.

Aufgabe 4 (Fundamentallösung auf $\mathbb{R}$ | 4 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{falls } x \leq y \\ y(1-x), & \text{falls } x > y \end{cases}$$

eine (Fundamental-) Lösung von

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2} G(x,y) = \delta_0(y-x) \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta_0(y-x)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

ist. Hierbei ist die Differentialgleichung im distributionellen Sinne zu verstehen.