Übungsblatt 3.

Abgabe bis: **Dienstag, 17.03.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Normäquivalenz | 4 Punkte)**.**

Vorgelegt sei die überlappende Gebietszerlegung $\Gamma = \cup_{i=1}^m \Gamma_i$ des Randes eines beschränkten Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Sei $\boldsymbol{\gamma}_i : \mathbb{R}^{d-1} \supset \Sigma_i \to \Gamma_i$ eine Parametrisierung von Γ_i, das heisst, $\Gamma_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{s}) \text{ für } \mathbf{s} \in \Sigma_i\}$. Nehmen Sie an, dass die Parametrisierung bi-Lipschitz ist. Sei schliesslich $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ eine passenden Zerlegung der Eins.

(a) Zeigen Sie, dass folgendes gilt

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_i} \varphi_i\big(\boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{s})\big)\Big|u\big(\boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{s})\big)\Big|^2 \sqrt{\det\big(\boldsymbol{\gamma}_i'(\mathbf{s})^\intercal \boldsymbol{\gamma}_i'(\mathbf{s})\big)}\,\mathrm{d}\mathbf{s} \sim \sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_i} \Big|\varphi_i\big(\boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{s})\big)u\big(\boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{s})\big)\Big|^2 \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

(b) Zeigen Sie für $s \in (0,1)$, dass die Normen

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \left(\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\big|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})\big|^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{d-1+2s}}\,\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}}\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\|u\|_{H^s_\gamma(\Gamma)} := \left(\sum_{i=1}^m \|\tilde{u}_i\|_{H^s(\Sigma_i)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

mit $\tilde{u}_i(\mathbf{s}) = \varphi_i\big(\boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{s})\big)u\big(\boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{s})\big)$ für alle $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{s}) \in \Gamma_i$ äquivalent sind, wobei die Äquivalenzkonstanten nur von der Parametrisierung und den Abschneidefunktionen $\{\varphi_i\}$ abhängt.

Hinweis. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen X und Y heisst* bi-Lipschitz*, wenn es ein $M \geq 1$ gibt, so dass*

$$\frac{1}{M}|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

für alle x, $y \in X$ gilt. Nach dem Satz von Rademacher ist eine Lipschitz-stetige Funktion fast überall differenzierbar. Ist die Parametrisierung bi-Lipschitz, so existiert deshalb die Gramsche Determinante und kann nach oben und unten beschränkt werden.

Aufgabe 2 (Faltung mit Dirac-Folgen I | 4 Punkte)**.**

Eine Folge $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von nichtnegativen Funktionen mit $\|\varphi_k\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ heißt *Dirac-Folge*, falls

$$\int_{\mathbb{R}\setminus B_\delta(0)} \varphi_k \,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty$$

für alle $\delta > 0$ erfüllt sind. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ nichtnegativ mit $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ und $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine nichtnegative Nullfolge. Dann definiert

$$\varphi_k(x) := \frac{1}{\varepsilon_k}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right)$$

eine Dirac-Folge.

(b) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ gilt $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

(c) Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$, dann folgt $\|f(\cdot + h) - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$ für $h \to 0$.

Hinweis. *Verwenden Sie, dass die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegen.*

Aufgabe 3 (Faltung mit Dirac-Folgen II | 4 Punkte)**.**

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Dirac-Folge. Beweisen Sie

$$\|\varphi_k * f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Hinweis. *Zu gegebenem $\delta > 0$ zerlege $\varphi_k = \varphi_k^{(1)} + \varphi_k^{(2)}$ mit*

$$\varphi_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & x \in B_\delta(0), \\ 0, & \textit{sonst}, \end{cases} \qquad \textit{und} \qquad \varphi_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & x \in \mathbb{R}\setminus B_\delta(0), \\ 0, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega = (a, b)$ ein Intervall. Zeigen Sie, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^1(\Omega)$ liegt.

Hinweis.

1. *Setzen Sie $f \in L^1(\Omega)$ auf $\mathbb{R}$ fort und konstruieren Sie sich eine Dirac-Folge $\{\varphi_{\varepsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_{\varepsilon_k}) \subset B_{\varepsilon_k}(0)$. Zeigen Sie $\varphi_{\varepsilon_k} * f \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

2. *Betrachten Sie für $\delta > 0$ die Mengen*

$$\Omega_\delta := \{x \in \mathbb{R} : B_\delta(x) \subset \Omega\} \quad \textit{und} \quad D_\delta := \Omega_\delta \cap B_{1/\delta}(0)$$

und definieren Sie sich die Funktionenfolge f_{ε_k} als Faltung von φ_{ε_k} mit

$$g_{\varepsilon_k}(x) := \begin{cases} f(x), & \textit{für } x \in D_{2\varepsilon_k}, \\ 0, & \textit{sonst}. \end{cases}$$