Übungsblatt 12.

Abgabe bis: **Dienstag, 26.05.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Interpolation I | 4 Punkte)**.**

Seien X_0 und X_1 normierte Unterräume eines grösseren Vektorraums. Wir sagen, dass X_0 und X_1 dann ein kompatibles Paar $X = (X_0, X_1)$ bilden. Die Unterräume $X_0 \cap X_1$ und $X_0 + X_1$ statten wir mit den Normen

$$\|u\|_{X_0 \cap X_1} = \big(\|u\|_{X_0}^2 + \|u\|_{X_1}^2\big)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\|u\|_{X_0 + X_1} = \inf\Big\{\big(\|u_0\|_{X_0}^2 + \|u_1\|_{X_1}^2\big)^{\frac{1}{2}} : u = u_0 + u_1 \text{ mit } u_0 \in X_0, u_1 \in X_1\Big\}$$

aus. Wir wollen eine Familie normierter Räume für ein gegebenes kompatibles Paar X konstruieren

$$K_{\theta,q}(X) = (X_0, X_1)_{\theta,q} \text{ für } 0 < \theta < 1 \text{ und } 1 \le q \le \infty$$

mit

$$X_0 \cap X_1 \subset K_{\theta,q}(X) \subset X_0 + X_1. \tag{1}$$

Sei $Y = (Y_0, Y_1)$ ein weiteres kompatibles Paar und seien $A_0 : X_0 \to Y_0$ und $A_1 : X_1 \to Y_1$ beschränkte, lineare Operatoren. Wenn

$$A_0 u = A_1 u \text{ für } u \in X_0 \cap X_1$$

nennen wir A_0 und A_1 kompatibel. Wir definieren das K-Funktional für $t > 0$ und $u \in X_0 + X_1$ durch

$$K(t, u; X) = \inf\Big\{\big(\|u_0\|_{X_0}^2 + t^2\|u_1\|_{X_1}^2\big)^{\frac{1}{2}} : u = u_0 + u_1 \text{ mit } u_0 \in X_0, u_1 \in X_1\Big\}.$$

Wir führen die gewichtete L^q-Norm ein

$$\|f\|_{\theta,q} = \left(\int_0^\infty \big|t^{-\theta} f(t)\big|^q \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \text{ für } 0 < \theta < 1,\ 1 \le q < \infty$$

und

$$\|f\|_{\theta,\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} \big|t^{-\theta} f(t)\big|.$$

Wir definieren

$$K_{\theta,q}(X) = \Big\{u \in X_0 + X_1 : \big\|K(\cdot, u; X)\big\|_{\theta,q} < \infty\Big\}$$

und wir setzen

$$\|u\|_{K_{\theta,q}(X)} = N_{\theta,q}\big\|K(\cdot, u; X)\big\|_{\theta,q}$$

mit

$$N_{\theta,q} = \frac{1}{\big\|\min(1,\cdot)\big\|_{\theta,q}} = \begin{cases} \big[q\theta(1-\theta)\big]^{\frac{1}{q}}, & \text{falls } 1 \le q < \infty, \\ 1, & \text{falls } q = \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$\|t \mapsto f(at)\|_{\theta,q} = a^\theta \|f\|_{\theta,q} \text{ für } a > 0.$$

(b) Falls $u \in X_0 \cap X_1$, dann ist $u \in K_{\theta,q}(X)$ und

$$\|u\|_{K_{\theta,q}(X)} \leq \|u\|_{X_0}^{1-\theta} \|u\|_{X_1}^{\theta} \leq \|u\|_{X_0 \cap X_1}.$$

(c) Falls $u \in K_{\theta,q}(X)$, dann ist $u \in X_0 + X_1$ und

$$K(t, u; X) \leq t^{\theta} \|u\|_{K_{\theta,q}(X)} \text{ und } \|u\|_{X_0+X_1} \leq \|u\|_{K_{\theta,q}(X)}.$$

Aus (b) und (c) kann man (1) folgern.

Aufgabe 2 (Interpolation II | 4 Punkte)**.**

In dieser Aufgabe wollen wir folgende Aussage zeigen:
Falls $A_0 : X_0 \to Y_0$ und $A_1 : X_1 \to Y_1$ kompatible, lineare und stetige Operatoren mit Stetigkeitskonstanten M_j, $j = 1, 2$ sind, dann existiert ein eindeutiger, linearer und stetiger Operator $A_\theta : K_{\theta,q}(X) \to K_{\theta,q}(Y)$, der

$$A_\theta u = A_0 u = A_1 u \text{ für } u \in X_0 \cap X_1$$

erfüllt und es gilt

$$\|A_\theta u\|_{K_{\theta,q}(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|u\|_{K_{\theta,q}(X)} \text{ für } u \in K_{\theta,q}(X). \tag{2}$$

(a) Seien A_1 und A_2 kompatibel wie oben und sei $u \in X_0 + X_1$. Zeigen Sie, dass $A_0 u_0 + A_1 u_1$ nicht von der Wahl $u_0 \in X_0$ und $u_1 \in X_1$ abhängt, wobei $u = u_0 + u_1$.

(b) Falls A_θ existiert, muss es $A_\theta u = A_0 u_0 + A_1 u_1$ für $u = u_0 + u_1$ mit $u_j \in X_j$ erfüllen. Hiervon kann man die Eindeutigkeit folgern. Zeigen Sie nun (2).

Aufgabe 3 (Niedrigrangmatrizen | 4 Punkte)**.**

Wir definieren für $p \in \mathbb{N}$ die Menge der $2^p \times 2^p$-Matrizen vom Rang 1 als

$$\mathcal{R}_p = \{\mathbf{A} = \mathbf{x}\mathbf{y}^T \in \mathbb{R}^{2^p \times 2^p}\}.$$

Wir wollen innerhalb dieser Menge die Matrix-Vektor-Multiplikation sowie die Matrix-Multiplikation betrachten und deren Aufwand abschätzen. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $n = 2^p$. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix-Vektor-Multiplikation von $\mathbf{R} \in \mathcal{R}_p$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ benötigt $N_{MV}(p) = 3n - 1$ Operationen.

(b) Die Matrix-Matrix-Multiplikation von $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \mathcal{R}_p$ benötigt ebenfalls $N_{\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}}(p) = 3n - 1$ Operationen.

Information: Die Matrix-Addition von zwei Matrizen $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \mathcal{R}_p$ liegt im Allgemeinen nicht in $\mathcal{R}_p$, da sich der Rang vergrössern kann. Es wird daher eine formatierte Addition verwendet. Diese bildet die Addition $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ und führt anschliessend eine Bestapproximation durch eine Matrix vom Rang 1 durch. Bezeichnen wir mit $B_{\mathcal{R}_p}$ die Bestapproximation in $\mathcal{R}_p$, so hat die formatierte Addition die Form

$$\mathbf{R}_1 \oplus_1 \mathbf{R}_2 := B_{\mathcal{R}_p}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2).$$

Für die formatierte Addition in $\mathcal{R}_p$ werden $N_{\mathbf{R}+\mathbf{R}} = 18n + 29$ Operationen benötigt.

Aufgabe 4 (hierarchische Matrizen | 4 Punkte)**.**

Die Menge der hierarchischen Matrizen $\mathcal{H}_k$ wird rekursiv definiert als

$$\mathcal{H}_0 := \mathbb{R}^{1\times 1},$$
$$\mathcal{H}_k := \left\{ \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2^k\times 2^k} \text{ mit } \mathbf{H}_{11}, \mathbf{H}_{22} \in \mathcal{H}_{k-1} \text{ und } \mathbf{H}_{12}, \mathbf{H}_{21} \in \mathcal{R}_{k-1} \right\}.$$

Wir definieren für $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{H}_k$ rekursiv die formatierte Matrix-Addition durch

$$\mathbf{G} \oplus_1 \mathbf{H} := \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} \oplus_1 \mathbf{H}_{11} & \mathbf{G}_{12} \oplus_1 \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} \oplus_1 \mathbf{H}_{21} & \mathbf{G}_{22} \oplus_1 \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix}.$$

Seien $p \in \mathbb{N}$ und $n = 2^p$. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix-Vektor-Multiplikation von $\mathbf{H} \in \mathcal{H}_p$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ benötigt $N_{MV}(p) = 4n\log_2 n - n + 2$ Operationen.

(b) Die formatierte Addition von $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{H}_p$ sowie die von $\mathbf{H} \in \mathcal{H}_p$ mit $\mathbf{R} \in \mathcal{R}_p$ benötigen $N_{\mathbf{H}+\mathbf{H}}(p) = N_{\mathbf{H}+\mathbf{R}}(p) = 18n\log_2 n + 59n - 58$ Operationen.

(c) Die Matrix-Matrix-Multiplikation von $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{H}_p$ benötigt $N_{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}(p) = 13n\log_2^2 n + 65n\log_2 n - 51n + 52$ Operationen. Für die auftretenden Additionen sollen hier formatierte Additionen verwendet werden.