Übungsblatt 11.

Abgabe bis: **Dienstag, 12.05.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (schlecht gestelltes Problem | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten für $u_T \in C([0,\pi])$ mit $u_T(0) = u_T(\pi) = 0$ das Rückwärts-Wärmeleitungsproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u && \text{in } [0,\pi] \times (0,T], \\ u &= 0 && \text{auf } \{0,\pi\} \times [0,T], \\ u(\cdot,T) &= u_T && \text{in } [0,\pi]. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass zu gegebener Endtemperatur u_T die Anfangstemperatur $u(\cdot,0)$ zu bestimmen ist. Zeigen Sie, dass dieses Problem schlecht gestellt ist, das heisst, zeigen Sie, dass die Anfangstemperatur $u(\cdot,0)$ nicht stetig von der Endtemperatur u_T abhängt.

Aufgabe 2 (Fredholmsche Alternative | 4 Punkte)**.**

Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{K}(H,H)$ kompakt.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $C > 0$ gibt, sodass

$$\|z\|_H \le C \big\|(A-I)z\big\|_H$$

für alle $z \perp \ker(A-I)$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{im}(A-I) = \overline{\operatorname{im}(A-I)}$$

gilt.

Aufgabe 3 (Robin-Randbedingungen | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten das Robin-Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= 0 && \text{für } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \gamma_1^{\text{int}} u(\mathbf{x}) + \kappa(\mathbf{x}) \gamma_0^{\text{int}} u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) && \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma, \end{aligned}$$

wobei Ω ein beschränktes, glattes Gebiet sei mit Rand Γ und $\operatorname{diam}(\Omega) < 1$, $\kappa(\mathbf{x}) \ge \kappa_0 > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Gamma$ und $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

(a) Leiten Sie eine Randintegralgleichung für die Bestimmung des Dirichlet-Datums $\gamma_0^{\text{int}} u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ her und schreiben Sie davon die Variationsformulierung auf.

(b) Zeigen Sie, dass ihre hergeleitete Bilinearform $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$-elliptisch ist.

Aufgabe 4 (Helmholtz-Gleichung | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten wieder die Helmholtz-Gleichung

$$\mathcal{L}_k u := -\Delta u - k^2 u = 0,$$

vergleiche Blatt 10, Aufgabe 3. Hierbei betrachten wir einen Lipschitz-Rand Γ und wir nehmen an, dass ein Isomorphismus

$$R : H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \quad \text{für alle } |s| < \frac{1}{2}$$

existiert, der für $s = 0$ hermitesch ist. Zur Lösung des äusseren Dirichlet-Problems verwenden wir den Potentialansatz

$$u(\mathbf{x}) = \widetilde{K}_k \varphi + i\eta \widetilde{V}_k R^{-1} \varphi$$

für alle $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit $\eta \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\mathcal{L}_k u = 0$ in $\Omega \cup \Omega^c$ für alle $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

(a) Vervollständigen Sie die folgende Randintegralgleichung in $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$g_D = \gamma_0^{\text{ext}} u = B_k \varphi := \dots,$$

wobei g_D die äusseren Dirichlet-Daten seien.

(b) Zeigen Sie, dass für $\eta \neq 0$ der Integraloperator B_k injektiv ist für alle k.