Übungsblatt 10.

Abgabe bis: **Dienstag, 05.05.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Neumannsche Reihe | 4 Punkte).

Lösen Sie die Integralgleichung

$$u(s) = \sin(\pi s) + \int_0^1 st\, u(t)\,\mathrm{d}t, \quad s \in [0,1]$$

mit Hilfe der Neumannschen Reihe.

Aufgabe 2 (Elliptizität des Einfachschichtoperators | 4 Punkte).

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Rand Γ. Lösen Sie das folgende Sattelpunktproblem: Finde $(u,\lambda) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned}(\mathcal{V}u, v)_\Gamma - \lambda(1,v)_\Gamma &= 0 \quad \text{für alle } v \in H^{-1/2}(\Gamma),\\ (u,1)_\Gamma &= 1.\end{aligned}$$

Verwenden Sie dafür den Ansatz $u := \widetilde{u} + 1/|\Gamma| \in H^{-1/2}(\Gamma)$ mit $(\widetilde{u},1)_\Gamma = 0$.

(b) Wir definieren die logarithmische Kapazität von Γ als

$$\mathrm{cap}_\Gamma := \exp(-2\pi\lambda).$$

Welche Bedingung muss diese erfüllen, damit $\lambda > 0$ ist?

Aufgabe 3 (Helmholtz-Gleichung | 4 Punkte).

Die Helmholtz-Gleichung mit positiver Wellenzahl $k > 0$ wird beschrieben durch

$$\mathcal{L}_k u := -\Delta u - k^2 u = f.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand Γ. Die Fundamentallösung zum Operator $\mathcal{L}_k$ ist gegeben durch

$$G_k(\mathbf{z}) = \frac{e^{ik\|\mathbf{z}\|}}{4\pi\|\mathbf{z}\|}.$$

Das Einfachschichtpotential ist gegeben durch

$$(\widetilde{V}_k\varphi)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y}\in\Gamma} G_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Es gilt für $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, dass $u := \widetilde{V}_k\varphi$ die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_k\widetilde{V}_k\varphi = 0$ in $\Omega \cup \Omega^c$ erfüllt. Der Einfachschichtoperator

$$\mathcal{V}_k = \gamma_0^{\mathrm{ext}}\widetilde{V}_k = \gamma_0^{\mathrm{int}}\widetilde{V}_k : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

ist wohldefiniert. Es gelten dieselben Sprungbedingungen wie beim Laplace-Problem. Zeigen Sie, dass der Einfachschichtoperator $\mathcal{V}_k$ auf $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ genau dann invertierbar ist, wenn k^2 kein Eigenwert des inneren Dirichlet-Problems zum Operator $-\Delta$ ist. Das heisst, falls k^2 kein Eigenwert ist, dann gilt

$$-\Delta u = k^2 u \quad \text{in } \Omega, \quad \gamma_0^{\mathrm{int}} u = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Zeigen Sie, dass der Kern von $\mathcal{V}_k$ gegeben ist durch

$$\mathrm{span}\{\gamma_1^{\mathrm{int}} v : -\Delta v = k^2 v \text{ in } \Omega \text{ und } \gamma_0^{\mathrm{int}} v = 0 \text{ auf } \Gamma\}.$$

Hinweis. *Für $f = 0$ gilt die Darstellungsformel*

$$u = -\widetilde{\mathcal{V}}\big([\gamma_1 u]\big) + \widetilde{\mathcal{K}}\big([\gamma_0 u]\big)$$

für Funktionen $u \in H^1(\Omega)$ mit $\mathcal{L}u = 0$ in Ω und $u = 0$ in Ω^c, wobei $\widetilde{\mathcal{K}}$ das Doppelschicht-potential bezeichnet, welches analog zum Laplace-Problem gegeben ist.
Falls im Aussenraum gilt

$$\mathcal{L}_k u = 0 \textit{ in } \Omega^c \textit{ und } \gamma_0^{ext} u = 0,$$

dann ist $u = 0$ die eindeutige Lösung dieses Problems.

Aufgabe 4 (Wärmeleitungsgleichung | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \qquad \text{in } U_T, \\ u &= g \qquad \text{auf } \Gamma_T. \end{aligned}$$

Hierbei ist $U_T = U \times (0, T]$ und $\Gamma_T = \overline{U}_T \backslash U_T$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes Gebiet. Wir nehmen an, dass die Wärmeleitungsgleichung eine Lösung $u \in C_1^2(\overline{U}_T)$ hat. Wir schreiben

$$C_1^2(U_T) := \big\{ u : U_T \to \mathbb{R} : \; u, \nabla u, \mathrm{D}^2 u, \partial_t u \in C(U_T) \big\}.$$

Zeigen Sie, dass diese Lösung eindeutig ist.