Übungsblatt 1.

Abgabe bis: **Dienstag, 25.02.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Fundamentallösung | 4 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}, & \text{falls } d = 3, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\log\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|, & \text{falls } d = 2, \end{cases}$$

der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{a}\}$ genügt, und dass gilt

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\dfrac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^3}, & \text{falls } d = 3, \\ -\dfrac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2}, & \text{falls } d = 2. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Lösungsdarstellung zu gegebenen Randdaten | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten die Laplace-Gleichung $-\Delta u = f$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Die Fundamentallösung für diese Gleichung lautet

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \qquad \text{für alle } \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Sie erfüllt die Differentialgleichung

$$-(\Delta_{\mathbf{y}}\Phi)(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta_0(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \qquad \text{für alle } \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

wobei die Delta-Distribution δ_0 charakterisiert ist durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega \delta_0(\mathbf{y}-\mathbf{x})u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} \qquad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Leiten Sie unter hinreichenden Glattheitsbedingungen eine Lösungsdarstellung der Laplace-Gleichung her, die von der Funktion f, den Dirichlet-Daten $u\big|_\Gamma$ bzw. den Neumann-Daten $(\partial u/\partial\mathbf{n})\big|_\Gamma$ und der Fundamentallösung Φ auf dem Gebietsrand abhängt.

Aufgabe 3 (Sobolev-Räume mit reellen Exponenten | 4 Punkte)**.**

Sei $s \in \mathbb{R}_+$ und $\Omega = (-1, 1)$.

(a) Gegeben sei die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\|u\|_{W^{s,2}(\Omega)} < \infty$ genau dann gilt, wenn $0 \leq s < 1/2$ ist.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$u(x) = |x|.$$

Zeigen Sie, dass $\|u\|_{W^{s,2}(\Omega)} < \infty$ genau dann gilt, wenn $0 \leq s < 3/2$ ist.

Aufgabe 4 (Koordiantentransformation und Parametrisierung | 4 Punkte)**.**

Seien $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und $h \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Wir betrachten das Objekt

$$\mathcal{C} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq R^2,\, 0 \leq z \leq h\big\}.$$

(a) Berechnen Sie das Integral
$$\int_{\mathcal{C}} 1 \,\mathrm{d}(x, y, z)$$
mit einer geeigneten Koordinatentransformation.

(b) Formen Sie das Volumenintegral in ein äquivalentes Oberflächenintegral über $\partial\mathcal{C}$ um.

Hinweis. *Benutzen Sie den Gaußschen Integralsatz.*

(c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral, indem Sie eine geeignete Parametrisierung der Oberfläche verwenden. Dabei kann die Parametrisierung aus mehreren Patches bestehen.